数理解析研究所講究録
402巻 1980年 1-14

双曲型方程式のエネルギー不等式について

京大 数理研　　萬代 武史

§1 序

次のような偏微分作用素を考える。

$$P(t,x;D_t,D_x) = D_t^m + \sum_{\substack{j+|\alpha|\le m\\ j\le m-1}} a_{j,\alpha}(t,x) D_t^j D_x^\alpha \qquad \cdots\cdots (1)$$

但し、ここで、係数 $a_{j,\alpha} \in \mathcal{B}^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ $(T>0)$

$$D_t = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}, \quad D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad etc.$$

さて、このような作用素に対する $\{t=0\}$ を初期面とする Cauchy 問題について、次のことはよく知られている。

P が regularly strictly hyperbolic のとき、

すなわち、$P_m(t,x;\tau,\xi) = \tau^m + \sum_{\substack{j+|\alpha|=m\\ j\le m-1}} a_{j,\alpha}(t,x)\tau^j\xi^\alpha = \prod_{j=1}^m (\tau - \lambda_j(t,x;\xi))$

とすると、$\lambda_j(t,x;\xi)$ は real、かつ

$$\inf_{\substack{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\\ |\xi|=1}} |\lambda_j(t,x;\xi) - \lambda_k(t,x;\xi)| > 0 \quad (j\ne k)$$

とするとき、P に対する Cauchy 問題は C^∞-well-posed であり、次の不等式が成立する。

$$\sum_{j+|\alpha|\leq m-1}\|D_t^j D_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(R^n)} \leq C\left\{\int_0^t \|Pu(\tau,\cdot)\|_{L^2(R^n)}d\tau + \sum_{j+|\alpha|\leq m-1}\|D_t^j D_x^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(R^n)}\right\} \quad \text{------}(2)$$

$$\text{for } 0\leq {}^\forall t\leq T,\ {}^\forall u\in C_0^\infty(R^{n+1})$$

逆に(2)の不等式を仮定すると、Pは regularly strictly hyperbolicでなくてはならないこともわかっている。この事実は、エネルギー不等式における微分の order の下がり具合がPの特性根の重複度に対応しているとみることができる。このように、エネルギー不等式における微分の order の下がり具合がどのようにきまってくるかを調べるのがここでの目標である。

§.2では、Pの主部が定数係数か、又はPの特性根の重複度が一定の場合を考える。この場合には、strictly hyperbolic の場合と同様に、丁度Pの特性根の重複度できまってしまう。

§.3では、一般の場合について、特性根の重複度との関係を調べる。一般の場合には、§.2のようなきっちりとした対応はなく、実際、次の§.4でみるように、特性根の重複度のみではきまらない。

§4では、低階項が大きく影響する現象を、特にある種の2階の作用素について調べる。

なお、ここでは、$P_m(t,x;\tau,\xi)=0$ をτの方程式とみたときの根を$(t,x;\xi)$におけるPの特性根と呼び、その重複度の最

大を $(t,x;\xi)$ における P の特性根の重複度と呼んでいる。

§.2　主部が定数係数もしくは特性根の重複度一定の場合

このセクションでは、次の２つの場合を考える。

(i)　$a_{j,\alpha}(t,x)$ $(j+|\alpha|=m)$ が定数の場合

(ii)　real-valued $\lambda_j(t,x;\xi)\in C^\infty([0,T]\times R^n\times(R^n\setminus\{0\}))$ $(j=1,\cdots,s)$

と正の整数 r_j $(j=1,\cdots,s)$ があって、

$$P_m(t,x;\tau,\xi)=\prod_{j=1}^{s}(\tau-\lambda_j(t,x;\xi))^{r_j}$$

さらに $\displaystyle\inf_{\substack{(t,x)\in[0,T]\times R^n\\|\xi|=1}}|\lambda_j(t,x;\xi)-\lambda_k(t,x;\xi)|>0$ $(j\neq k)$ …… (3)

これらの場合には、$\{t=0\}$ を初期面とする Cauchy 問題が $[0,T]\times R^n$ で C^∞-well-posed かつ有限伝播速度をもつための必要十分条件が知られている。すなわち

(i) の場合　(J. L. Dunn [8], S. Wakabayashi [9])

(A−1)　$P(t,x;\tau,\xi)$ が $(t,x)\in[0,T]\times R^n$ を固定するごとに (τ,ξ) の多項式として hyperbolic polynomial

(ii) の場合　(S. Mizohata − Y. Ohya [2, 4], H. Flaschka − G. Strang [5], V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov [7], J. Chazarain [6])

(A−2)　U: $[0,T]\times R^n$ の open subset，$\varphi\in C^\infty(U)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\lambda_j(t,x;\mathrm{grad}_x\varphi)\ \text{on}\ U,\quad \mathrm{grad}_{(t,x)}\varphi\neq0\ \text{on}\ U$$

ならば、

$$e^{-i\rho\varphi} P(e^{i\rho\varphi} f) = O(\rho^{m-r\sigma}) \quad (\rho\to+\infty) \quad \cdots(4)$$
$$\text{for } {}^\forall f\in C_0^\infty(U)$$

この時、次のことが成立する。

<u>定理 2－1</u>

(i),(ii)の場合、それぞれ(A－1),(A-2)の仮定のもとで、

〈1〉 Pの特性根の重複度が任意の$(t,x;\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$

において、r次以下とすると、定数Cがあって、

$$\sum_{j+|\alpha|\le m-r}\|D_t^j D_x^\alpha u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\Big\{\int_0^t (t-\tau)^{r-1}\|Pu(\tau,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}d\tau$$
$$+\sum_{j+|\alpha|\le m-r}\|D_t^j D_x^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \sum_{\ell=1}^{r-1} t^\ell \sum_{j+|\alpha|\le m-r+\ell}\|D_t^j D_x^\alpha u(0,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\Big\} \cdots(5)$$
$$\text{for } 0\le {}^\forall t\le T,\ {}^\forall u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$$

〈2〉 逆に、$[0,T]\times\mathbb{R}^n$のある open subset $U\ne\phi$ に対して

$$\sum_{j+|\alpha|\le m-r}\|D_t^j D_x^\alpha u\|_{L^2(U)} \le C\|Pu\|_{L^2(U)} \quad \cdots\cdots(6)$$
$$\text{for } {}^\forall u\in C_0^\infty(U)$$

が成立するとすると、Pの特性根の重複度は任意の

$(t,x;\xi)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$において、r次以下

証明は、(i)の場合は、G. Peyser [1] の方法を詳しくみることにより行ない、(ii)の場合は、主部を strictly hyperbolic operators の積に分解し、低階項もそれに応じた分解をすることにより行なう。

<u>注意 2－2</u>

① (5)の不等式の右辺第3項にt^ℓがかかっていることは、

tが十分小のとき、$(m-r+1)$次以上の微分の初期値は、左辺に少ししか影響しないことを示している。

② (5)は非常に強い不等式であり、(i),(ii)の場合以外の一般の場合でも、(5)を仮定すると、特性根の重複度$\leq r$が出る。$\longrightarrow$ 定理 3－1

上の定理により、(i),(ii)の場合には、エネルギー不等式における微分のorderの下がり具合は、丁度特性根の重複度できまるといえる。

§.3. 一般の場合のエネルギー不等式における微分のorderの下がり具合と、特性根の重複度との関係

まず、§1で述べたことのある拡張を述べる。

定理 3－1

U: $\mathbb{R}^n$のopen set, $1 \leq r \leq m$ に対して、定数Cがあって、

$$\sum_{\substack{j+|\alpha| \\ \leq m-r}} \int_0^t \|D_t^j D_x^\alpha u(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \leq C \cdot \int_0^t (t-s)^r \|Pu(s,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \cdots (7)$$

$$\text{for } 0 \leq {}^\forall t \leq T, \ {}^\forall u \in C_0^\infty([0,T] \times U)$$

が成立するならば、Pの特性根は、$[0,T] \times U \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$においてrealかつその重複度は$r$以下である。さらに、$P$と$C$にのみdependする定数$\delta > 0$があって、次が成立する。

$\tau_1, \cdots, \tau_p$が$(t,x;\xi) \in [0,T] \times U \times \{\xi \in \mathbb{R}^n ; |\xi| = 1\}$における

Pの相異なる特性根で、その重複度の和が$(r+1)$以上のものとすると

$$\max_{j,k}|\tau_j-\tau_k|\geq\delta \quad \text{------------}(8)$$

証明は V. Ya. Ivrii - V. M. Petkov [7], Theorem 1.1 の証明の方法を使う。

<u>注意 3−2</u>

① (7)の不等式は、(5)の両辺を積分すると得られるので、§.2で扱った作用素については成立している。

② 上の定理で、$r=1$とすると、§1で述べた次の命題が得られる。

"(2)の不等式が成立すると仮定すると、
Pは regularly strictly hyperbolic になる。"

③ (8)は重複度もこめて$(r+1)$個以上の特性根が、ある程度以上近くに集まることがないことを示している。

上の定理の不等式(7)は非常に強い不等式なので、もう少し弱いものも考えたい。ここでは、次の不等式を考える。

$$(B-p,L)\quad \sum_{j+|\alpha|\leq m-L}\int_0^t\|D_t^jD_x^\alpha u(s,\cdot)\|_{L^2(R^n)}ds \leq C\int_0^t(t-s)^p\|Pu(s,\cdot)\|_{L^2(R^n)}ds \quad \text{---}(9)$$

$$(C-p,L)\quad \sum_{j+|\alpha|\leq m-L}\int_0^t\|D_t^jD_x^\alpha u(s,\cdot)\|^2_{L^2(R^n)}ds \leq C\int_0^t(t-s)^p\|Pu(s,\cdot)\|^2_{L^2(R^n)}ds \quad \text{---}(10)$$

for $0\leq {}^\forall t\leq T,\ {}^\forall u\in C_0^\infty([0,T]\times R^n)$ (p,Lは非負整数)

定理　3－3

$\{t=0\}$ を初期面とする、P に対する Cauchy 問題が $[0,T]\times R^n$ で C^∞-well-posed かつ有限伝播速度をもつとし、さらに、$(\hat{t},\hat{x};\hat{\xi})\in[0,T]\times R^n\times(R^n\setminus\{0\})$ で重複度 r の特性根をもつとする。このとき、

<1>　$0<\hat{t}<T$ のとき

$(B-p,L)$ が成立 $\Longrightarrow$ $r\leq 2L-p$

$(C-p,L)$ が成立 $\Longrightarrow$ $r\leq 2L-\frac{p}{2}$

<2>　$\hat{t}=0$ or T のとき

$(B-p,L)$ が成立 $\Longrightarrow$ $r\leq 3L-2p$

$(C-p,L)$ が成立 $\Longrightarrow$ $r\leq 3L-p$

証明は、V. Ya. Ivrii－V. M. Petkov [7], Theorem 4.1 を使い、P を asymptotic expansion して証明する。C^∞-well-posed かつ有限伝播性をもつという仮定はこの Theorem 4.1 を使うためのものである。

注意　3－4

① 上の定理で、$p=1$, $L=1$ のときを考えると、$(B-1,1)$ の不等式については <1>, <2> の場合とも、$r=1$ となる。これは、定理3－1の $r=1$ のときに対応している。一方、$(C-1,1)$ の不等式のほうは、<1> の場合は $r=1$ だが、<2> の場合は $r=2$ もありうる。つまり、微分の

order は1つしか下がらないのに 特性根が double になることがあるかもしれないということである。実際にこのことがおこる簡単な例は次のものである。

例 3−5 (Tricomi operator)

$$P = D_t^2 - t D_x^2 + a(t,x) D_x + c(t,x) D_t + d(t,x)$$

を考えると、$\forall a, c, d \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^2)$ に対して、P に対する $\{t=0\}$ を初期面とする Cauchy 問題は C^∞-well-posed かつ有限伝幡速度をもち さらに次の不等式が成立する。

$$\sum_{j+k\le 1} \| D_t^j D_x^k u(t,\cdot) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \le C \int_0^t \| Pu(s,\cdot) \|^2_{L^2(\mathbb{R})} ds$$

$$\text{for } 0 \le {}^\forall t \le T, \ {}^\forall u \in C_0^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$$

なお、P は $t=0$ で double characteristic なので、

$$\sum_{j+k\le 1} \| D_t^j D_x^k u(t,\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R})} \le C \int_0^t \| Pu(s,\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R})} ds$$

$$\text{for } 0 \le {}^\forall t \le T, \ {}^\forall u \in C_0^\infty([0,\infty) \times \mathbb{R})$$

なる不等式は成立しないことが定理3−3よりわかる。(これが (B−p.L), (C−p.L) という2通りの不等式を考えた理由である。)

§.4 エネルギー不等式への低階項の影響

§.1でも述べたように、一般の偏微分作用素については エネルギー不等式の微分の order の下がり具合は、特性根の重複度のみではきまらず、低階項が大きく影響することがあ

る。まず、その典型的な例を考えよう。

例 4−1

$$P = D_t^2 - t^{2k_1} a_1(t,x) D_{x_1}^2 - t^{2k_2-1} a_2(t,x) D_{x_2}^2 - a_3(t,x) D_{x_3}^2 + \sum_{j=1}^{3} b_j(t,x) D_{x_j} + c(t,x) D_t + d(t,x)$$

という operator を考える。但し、ここで、$a_j, b_j, c, d \in \mathcal{B}^\infty$, k_1, k_2 は正整数，$a_j(t,x) \geqq \delta > 0$ on $[0,T] \times R^3$ $(j=1,2,3)$ とする。このような P に対して、Cauchy 問題が C^∞-well-posed になるための必要十分条件は、

ある $\tilde{b}_j \in \mathcal{B}^\infty$ があって、$b_j(t,x) = t^{k_j-1} \tilde{b}_j(t,x)$ $(j=1,2)$

である。(V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov [7], O. A. Olejnik [3])

この条件が満たされているとき、O. A. Olejnik [3] が示したエネルギー不等式は、微分の order が、$\sup_x \frac{|b_1(0,x)|}{\sqrt{a_1(0,x)}}$ に比例して下がっていくようなものであった。(b_2, b_3 には independent)

このセクションでは、上のようなことが、本当に起こることをいいたい。すなわち、$\sup_x \frac{|b_1(0,x)|}{\sqrt{a_1(0,x)}}$ が大きくなると、必然的にエネルギー不等式における微分の order も下がることをいいたい。(これに関して知られている結果は V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov [7], Theorem 3 のみであるように思われるが、この結果は上の例でいえば、$k_1 = 1$ のときしか使えない。)

次のような2階の偏微分方程式を考えよう。

$$P = D_t^2 - 2\sum_{j=1}^{n} a_j(t,x) D_t D_{x_j} + \sum_{j,\ell=1}^{n} b_{j,\ell}(t,x) D_{x_j} D_{x_\ell}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} c_j(t,x) D_{x_j} + d(t,x) D_t + e(t,x)$$

$a_j, b_{j,\ell}, c_j, d, e \in C^\infty$, $(b_{j,\ell})_{j\ell}$: symmetric

このPに対して、次のことがわかっている。

命題 4−2

Pにおいて、$1 \leq j_0 \leq n$ に対して、

$$\begin{cases} a_{j_0}(t,x) = t^k \tilde{a}_{j_0}(t,x) \\ b_{j_0,j_0}(t,x) = t^{2k} \tilde{b}_{j_0,j_0}(t,x) \\ b_{j_0,\ell}(t,x) = t^k \tilde{b}_{j_0,\ell}(t,x) \quad (\ell \neq j_0) \end{cases} \quad \cdots\cdots (11)$$

但し、k は正整数、$\tilde{a}_{j_0}, \tilde{b}_{j_0,\ell} \in C^\infty$

となっているとすると、Pに対する $\{t=0\}$ を初期面とするCauchy問題が C^∞-well-posed なら、

$$c_{j_0}(t,x) = t^{k-1} \tilde{c}_{j_0}(t,x) \quad , \quad \tilde{c}_{j_0} \in C^\infty \quad \cdots\cdots (12)$$

となっている。

証明は V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov [7], Theorem 4.1 よりしたがう。

さて、(11), (12) をみたす２階の作用素Pに対して、上で述べた現象を調べよう。

定理 4−3

Pが(11), (12) を満たしているとする。

さらに、$\tilde{a}_{j_0}(0,0), \tilde{b}_{j_0,j_0}(0,0) \in \mathbb{R}$

$\tilde{a}_{j_0}(0,0)^2 - \tilde{b}_{j_0,j_0}(0,0) > 0$ とする。

このとき、　p：整数，q：非負整数

U：$(0,0)$ の近傍

$U_t = ([0,T]\times\mathbb{R}^n)\cap U$ に対して，

$$\|u\|_{H^p(U_t)} \leq C\cdot\|Pu\|_{H^q(U_t)} \quad\cdots\cdots\cdots (13)$$

$$\text{for } 0\leq {}^\forall t\leq T,\ {}^\forall u\in C_0^\infty(U_t)$$

（C は t, u に independent な定数）

が成立するなら，

$$\frac{|\mathrm{Im}\,\tilde{C}_{j_0}(0,0) - k\cdot\tilde{a}_{j_0}(0,0)|}{\sqrt{\tilde{a}_{j_0}(0,0)^2 - \tilde{b}_{j_0,j_0}(0,0)}} \leq 20(k+1)^2(q+2-p) \quad\cdots (14)$$

但し、

$$\|\varphi\|_{H^p(\Omega)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j+|\alpha|\leq p} \|D_t^j D_x^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)} & (p\geq 0) \\ \displaystyle\sup_{\psi\in C_0^\infty(\Omega)} \frac{|(\psi,\varphi)_{L^2(\Omega)}|}{\|\psi\|_{H^{-p}(\Omega)}} & (p<0) \end{cases}$$

証明は V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov [7] の Theorem 3 の証明と同様の方針で行なう。

この結果により、例4−1 の場合は

$$\|u\|_{H^p([0,t]\times\mathbb{R}^n)} \leq C\cdot\|Pu\|_{H^q([0,t]\times\mathbb{R}^n)}$$

$$\text{for } 0\leq {}^\forall t\leq T,\ {}^\forall u\in C_0^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^n)$$

が成立するならば，

$$\sup_x \frac{|\mathrm{Im}\,b_1(0,x)|}{\sqrt{a_1(0,x)}} \leq 20(k_1+1)^2(q+2-p)$$

となり、左辺が大きくなると、$q+2-p$ も大きくなり、微分の order が大きく下がる。

さて、最後に、上のような現象が起こる例を例4−1よりもっと広いclassで述べよう。

<u>例 4−4</u>

$$P_2 = D_t^2 - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x)\, t^{k_j+k_l} D_{x_j} D_{x_l}$$

を主部にもつ偏微分作用素Pを考える。但し、

$a_{jl} \in \mathcal{B}^\infty([0,T]\times R^n)$, $(a_{jl})_{jl}$: symmetric, real

$k_1,\dots,k_\nu$: 正整数 $(0 \le \nu \le n)$, $k_{\nu+1} = \dots = k_n = 0$

$$\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}(t,x)\xi_j\xi_l \ge \delta|\xi|^2$$

$$\sum_{j,l=1}^{n} (k_j+k_l)\, a_{jl}(t,x)\xi_j\xi_l \ge \delta|\xi|^2 \qquad (\delta>0)$$

for ${}^\forall(t,x,\xi) \in [0,T]\times R^n \times R^n$

とする。このようなPに対する$\{t=0\}$を初期面とするCauchy問題がC^∞-well-posedであるための必要十分条件は、低階項が、

$$\sum_{j=1}^{\nu} b_j(t,x)\, t^{k_j-1} D_{x_j} + \sum_{j=\nu+1}^{n} b_j(t,x) D_{x_j} + c(t,x) D_t + d(t,x)$$

の形をしていることであり、(V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov [7], O. A. Oleĭnik [3]の結果より出る。)このとき、

$$\|u\|_{H^p([0,t]\times R^n)} \le C\cdot \|Pu\|_{H^q([0,t]\times R^n)}$$

for $0 \le {}^\forall t \le T$, ${}^\forall u \in C_0^\infty([0,T]\times R^n)$

が成立するならば、

$$\sup_x \frac{|\mathrm{Im}\, b_j(0,x)|}{\sqrt{a_{jj}(0,x)}} \le 20(k_j+1)^2(q+2-p) \qquad (j=1,\dots,\nu)$$

となる。($b_{\nu+1},\dots,b_\nu$ は微分のorderの下がり具合には影

響せず、 $\sup_x \frac{|\mathrm{Im}\, b_j(t,x)|}{\sqrt{a_{jj}(t,x)}}$ にのみ depend して微分の order が下がるようなエネルギー不等式が実際に成立する。)

§5 文献

[1] G. Peyser ; Energy inequalities for hyperbolic equations in several variables with multiple characteristics and constant coefficients., Trans. Amer. Math. Soc., 108 (1963), 478–490

[2] S. Mizohata – Y. Ohya : Sur la condition de E.E. Levi concernant des équations hyperboliques., Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A., 4 (1968), 511–526

[3] O.A. Olejnik : On ~~the~~ Cauchy problem for weakly hyperbolic equations., Comm. Pure Appl. Math., 23 (1970), 569–586

[4] S. Mizohata – Y. Ohya : Sur la condition d'hyperbolicité pour les équations à caractéristiques multiples, II", Japan J. Math. 40 (1971), 63 – 104

[5] H. Flaschka – G. Strang : The correctness of the Cauchy problem., Advances in Math., 6 (1971), 347–379

[6] J. Chazarain : Le problème de Cauchy pour les opérateurs hyperboliques, non necessairement stricts, qui satisfont

à la condition de Lévi., C.R. Acad. Sci., Paris. t. 273 (1971), A 1218−1221

[7] V. Ya. Ivrii − V. M. Petkov : Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed., Russian Math. Surveys 29:5, (1974), 1−70.

[8] J. L. Dunn : A sufficient condition for hyperbolicity of partial differential operators with constant coefficient principal part., Trans. Amer. Math. Soc. 201 (1975), 315−327

[9] 若林誠一郎 : 主部が定係数双曲型である作用素について., 数理解析研究所講究録 357 (1979), 69−85

[10] 萬代 武史 : 双曲型方程式のエネルギー不等式について., 修士論文, 京大 数理解析専攻 (1980)